
LA COLUMNA DE MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Sección a cargo de

Tomás Recio

**Algunas propiedades extremales de las raíces
de polinomios ortogonales**

por

Carlos Beltrán, Francisco Marcellán y Andrei Martínez-Finkelshtein**1. INTRODUCCIÓN**

En este artículo recopilamos algunas de las propiedades «extremales» que tienen las raíces de diversas familias de polinomios ortogonales.

Decimos que una familia de polinomios p_0, \dots, p_n, \dots , con el grado de p_n igual a n , es ortogonal, si se cumple que el *producto escalar* de p_i y p_j , para $i \neq j$, vale 0. Diferentes nociones de producto escalar para polinomios producen las diferentes familias.

Los ceros de estas familias de polinomios ortogonales tienen muchas propiedades interesantes, que las hacen únicas en el sentido de que resuelven problemas que podríamos llamar, de algún modo, extremales.

En este escrito introduciremos los conceptos necesarios para comprender las propiedades de distribución de las raíces de estas familias. Nuestro objetivo es ilustrar cómo en la teoría clásica se han utilizado estas propiedades extremales, incluyendo algunas indicaciones acerca de las direcciones en que se desarrollan las investigaciones en la actualidad, y motivar al lector para introducirse, por un camino nuevo, en el amplísimo y fructífero universo de los polinomios ortogonales.

Nuestro punto de partida es la necesidad de aproximar funciones cualesquiera por otras sencillas, uno de los pilares fundamentales del método científico. Pensemos en la más elemental aplicación física: a partir de datos obtenidos observando la caída de objetos en el vacío obtenemos una tabla de medidas, como podría ser la tabla 1. Aunque esta tabla contiene toda la información que hemos recopilado, la comprensión del proceso físico subyacente se produce solo cuando nos damos cuenta de que esas medidas corresponden aproximadamente a la fórmula

$$\text{Espacio recorrido} \approx 4.9 (\text{Tiempo transcurrido})^2. \quad (1)$$

Tiempo transcurrido (segundos)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Distancia recorrida (metros)	0	0.196	0.784	1.764	3.136	4.9

Tabla 1: Espacio recorrido por un cuerpo en caída libre en el vacío, en función del tiempo.

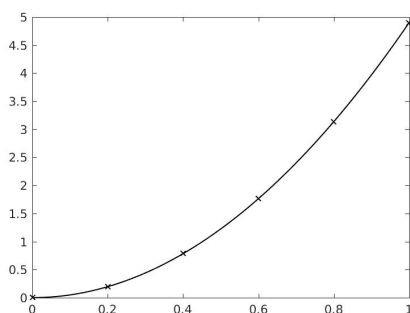


Figura 1: Datos de la tabla 1 (señalados con una «x») y representación gráfica de la función (1).

Esta observación nos permite deducir que se trata, al menos aproximadamente, de un movimiento uniformemente acelerado, y es a partir de ella que podemos obtener información útil tal como el valor de la aceleración debida a la gravedad, que en efecto sería del doble de la constante de proporcionalidad, esto es, 9.8 m/s^2 . Matemáticamente, hemos partido de una función que, en principio, podría ser complicada (aquella que, en función del tiempo transcurrido, nos da la distancia recorrida), hemos tomado algunos valores de ella (los especificados en la tabla 1) y hemos encontrado una función más sencilla que se ajusta a los valores de la tabla, obteniendo así información útil y condensada del proceso. En la figura 1 podemos ver que, en efecto, la función cumple con todos los valores de la tabla.

En este ejemplo elemental podemos pensar que ha sido muy fácil encontrar una función sencilla para aproximar otra más complicada. Una simplificación que hemos hecho es que las medidas de la tabla 1 no se han obtenido experimentalmente, sino que han sido elegidas para ajustarse de forma exacta a un modelo teórico concreto, de forma que no hay errores de medición. Pero el verdadero motivo por el que ha sido sencillo es que ya sabíamos de antemano la función que teníamos que buscar; todos conocemos la sencilla norma que rige la caída libre de cuerpos en ausencia de rozamiento:

$$\text{Espacio recorrido} = \frac{1}{2} g (\text{Tiempo transcurrido})^2,$$

donde $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$. Así pues, esta vez jugábamos con ventaja.

En problemas reales sucede con frecuencia que no tenemos una fórmula previa a la que ajustar una función. Pero, incluso sin ese conocimiento previo, la idea de sustituir una función complicada o una serie de mediciones por una función más

simple tiene muchos atractivos. De las posibles funciones simples con las que hacer nuestra aproximación, las más privilegiadas son los polinomios: se manejan fácilmente, se pueden integrar o derivar inmediatamente, y tenemos toda la teoría del álgebra y del cálculo para ayudarnos a entenderlas. Pero, dada una función de la que, por ejemplo, solo podemos calcular una tabla de valores, ¿cómo encontramos un polinomio que la aproxime de forma satisfactoria?

2. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL Y POLINOMIOS ORTOGONALES

Una idea muy sencilla, pero muy productiva, para aproximar una función f dada sobre un intervalo $[a, b]$, por medio de un polinomio p de grado máximo n prefijado ($\deg(p) \leq n$), es exigir que este coincida con f en una serie de puntos («nodos») $x_i \in [a, b]$ predefinidos (y distintos dos a dos). En otras palabras, queremos que $p(x_i) = f(x_i)$. Un conteo de los coeficientes libres nos indica que, si esperamos unisolvencia de ese problema¹, la cantidad de esos nodos debe ser $n+1$. Y, en efecto, la solución de este problema, conocido como *problema de interpolación polinomial de Lagrange*, viene dada por la sencilla fórmula que lleva el nombre de ese ilustre matemático,

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x), \quad L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}. \quad (2)$$

Es fácil comprobar que $\deg(p) \leq n$, mientras que las deseadas condiciones de interpolación son consecuencia directa de las propiedades de los polinomios básicos L_i ,

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

Sin duda, p es el «sustituto ideal» de f en los puntos $x = x_i$, en el sentido de que p y f coinciden en dichos puntos, pero ¿lo es en todo el intervalo $[a, b]$? El conocido ejemplo de Runge (ver figura 2) muestra que no siempre es así. Es más, aumentar la cantidad de nodos equiespaciados no resuelve nada: las oscilaciones del polinomio interpolador cerca de los extremos del intervalo se vuelven cada vez más «salvajes», lo que se conoce como *fenómeno de Runge*.

La solución pasa por distribuir los nodos en el intervalo de una manera más «inteligente». Por ejemplo, si usamos como nodos los puntos

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(indicados gráficamente en la figura 3), el resultado es muy diferente, ver la figura 4. ¿Qué son esos puntos misteriosos? Son los ceros del polinomio de grado n de la familia de polinomios más ilustre de todas, los *polinomios de Chebyshev* (de primera especie), dados por la fórmula

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

¹Es decir, que p siempre exista, independientemente de f , y sea único.

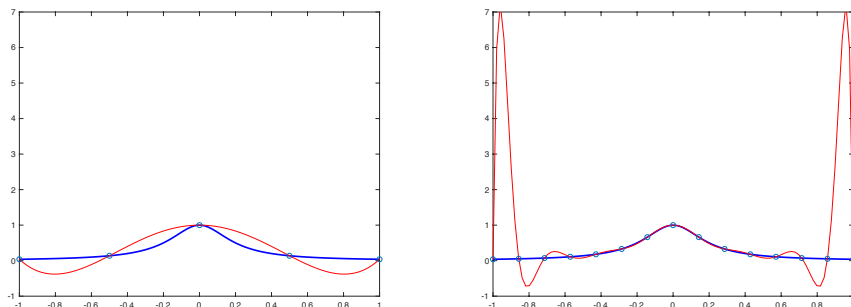


Figura 2: Aproximación de la función $f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$ (línea gruesa) en el intervalo $[-1, 1]$, mediante el polinomio interpolador (línea fina), en 5 (izquierda) y 15 nodos equiespaciados en el intervalo. Se ve que la calidad de la aproximación empeora (con fuertes oscilaciones en los extremos) según el número de nodos crece.

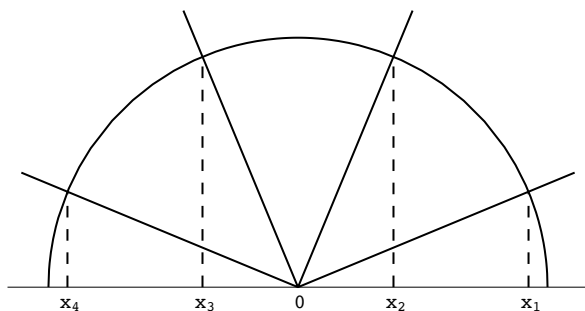


Figura 3: Ceros del polinomio T_4 .

Para convencernos de que (3) define polinomios de grado exactamente n basta ver que $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ y usar la conocida fórmula trigonométrica

$$\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2 \cos \theta \cos k\theta, \quad k \geq 1,$$

de donde

$$\cos(k+1)\theta = 2 \cos \theta \cos k\theta - \cos(k-1)\theta, \quad k \geq 1.$$

De esta forma, haciendo $x = \cos \theta$, queda

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \geq 1, \quad (4)$$

lo que muestra que T_n es un polinomio de grado n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Los polinomios de Chebyshev son una verdadera «navaja suiza» de los polinomios, pues satisfacen varias propiedades muy interesantes, lo que los hace prácticamente omnipresentes en aplicaciones. Entre otras cosas, para cada grado n fijado, el

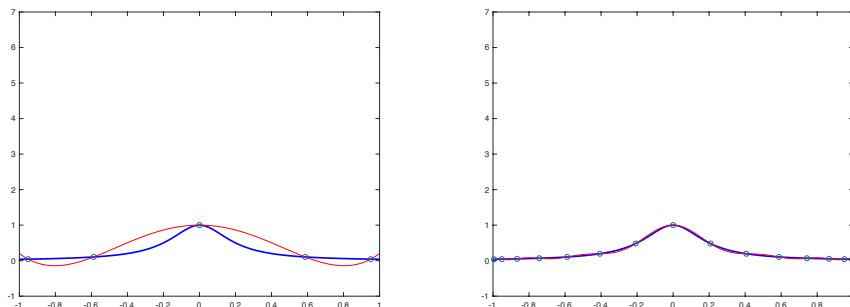


Figura 4: Aproximación de la función $f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$ (línea gruesa) en el intervalo $[-1, 1]$, mediante el polinomio interpolador (línea fina), en 5 y 15 nodos de Chebyshev (imágenes izquierda y derecha, respectivamente). La calidad de la aproximación mejora con el número de nodos.

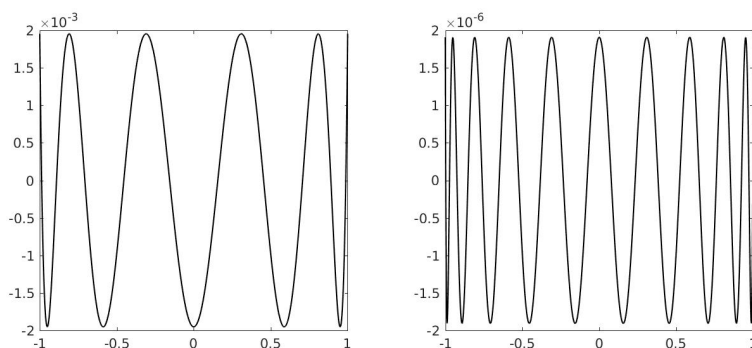


Figura 5: Polinomios de Chebyshev normalizados \hat{T}_{10} (izquierda) y \hat{T}_{20} en el intervalo $[-1, 1]$. Ambos tienen, entre los polinomios mónicos del grado correspondiente, la menor norma del supremo en dicho intervalo. Se observa que las raíces tienden a acumularse cerca de los extremos del intervalo.

polinomio mónico

$$\hat{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x), \quad n \geq 1, \quad (5)$$

es el que presenta la menor desviación del cero entre todos los polinomios mónicos de ese grado:

$$\max_{x \in [-1, 1]} |\hat{T}_n(x)| = \min \left\{ \max_{x \in [-1, 1]} |q_n(x)| : q_n \text{ mónico de grado } n \right\}.$$

Podemos ver algunos de estos polinomios dibujados en la figura 5.

Todo lector que tenga nociones de análisis matemático reconoce en la expresión de la izquierda la conocida norma del supremo, o norma L^∞ , en $[-1, 1]$,

$$\|p\|_{L^\infty} := \max_{x \in [-1, 1]} |p(x)|,$$

de modo que podemos reescribir la propiedad característica de los polinomios de Chebyshev de primera especie como

$$\|\widehat{T}_n\|_{L^\infty} = \min \{\|q_n\|_{L^\infty} : q_n \text{ mónico de grado } n\}.$$

Una explicación de por qué los ceros de T_n constituyen buenos nodos de interpolación se obtiene usando un conocido *teorema de Cauchy* para el error (véase, por ejemplo, [10, p. 56]), que dice que si $f \in C^n([-1, 1])$ y existe $f^{(n+1)}(x)$ para $x \in (-1, 1)$, entonces, para el polinomio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ en nodos x_0, \dots, x_n en $[-1, 1]$ y para cada $x \in [-1, 1]$, existe $\zeta_x \in (-1, 1)$ tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta_x)}{(n+1)!} \omega_n(x), \quad \text{donde } \omega_n(x) := (x - x_0) \cdots (x - x_n); \quad (6)$$

el polinomio ω_n se conoce con el nombre de *polinomio nodal*.

Observemos el miembro derecho de (6): el factor $f^{(n+1)}(\zeta_x)/(n+1)!$ no depende de los nodos x_i , mientras que ω_n no depende de la función f que estamos interpolando. De modo que si solamente tenemos poder sobre cómo distribuir los nodos para que el error sea pequeño para *cualquier* función suficientemente suave, más nos vale procurar que ω_n sea pequeño sobre $[-1, 1]$. ¿Pequeño en qué sentido? Una de las posibilidades es precisamente en la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$, es decir,

$$\|\omega_n\|_{L^\infty} \longrightarrow \min$$

(con esta notación queremos indicar que estamos buscando cómo minimizar la norma), lo que da lugar precisamente a los nodos de Chebyshev que hemos visto antes.

Pero la norma del supremo no es la única norma posible (ni siempre la más conveniente). Otra norma que tiene grandes ventajas es la norma L^2 : dada una función w continua a trozos sobre $(-1, 1)$ y no negativa, podemos definir un producto escalar

$$\langle f, g \rangle_w := \int_{-1}^1 f(x)g(x)w(x) dx, \quad f, g \in C([-1, 1]), \quad (7)$$

y la correspondiente norma

$$\|f\|_{L^2(w)} := \sqrt{\langle f, f \rangle_w} = \left(\int_{-1}^1 f(x)^2 w(x) dx \right)^{1/2}.$$

Por ejemplo, podríamos tomar $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ y resolver el problema

$$\min \left\{ \|q_n\|_{L^2(w)} : q_n \text{ mónico de grado } n \right\}.$$

Sorprendentemente, ¡la solución viene dada nuevamente por el polinomio de Chebyshev mónico que hemos definido en (5)!

Las normas que se definen en términos de productos escalares tienen grandes ventajas. Una entre ellas es que enlazan la métrica y la geometría. Para nosotros, que vivimos en un mundo euclídeo, es totalmente intuitivo que la distancia mínima y la perpendicularidad («ortogonalidad») vayan de la mano. En efecto, una consecuencia de la extremalidad de los polinomios T_n en la norma $L^2(w)$ es que, con $w(x) := (1 - x^2)^{-1/2}$,

$$\langle x^k, T_n(x) \rangle_w = \int_{-1}^1 x^k T_n(x) w(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

o, de forma equivalente,

$$\langle T_m, T_n \rangle_w = \int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad m \neq n.$$

Por lo que hemos visto, la optimización de la posición de los nodos de interpolación por medio del problema

$$\|\omega_n\|_{L^2(w)} \longrightarrow \text{mín} \quad \text{con} \quad w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

tiene como solución los mismos nodos de Chebyshev que si minimizamos la norma del supremo. Pero podemos usar otros pesos w sobre $[-1, 1]$. Posiblemente el más inmediato sea el constante $w(x) = 1$: los polinomios extremales mónicos P_n de grado n que resuelven

$$\|\omega_n\|_{L^2(w)} \longrightarrow \text{mín} \quad \text{con} \quad w(x) = 1$$

se conocen como *polinomios de Legendre* y, consecuentemente, satisfacen las condiciones de ortogonalidad

$$\langle P_m, P_n \rangle_w = \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) w(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Sus ceros son otra buena opción para nodos de interpolación, pero, a diferencia de los de T_n , no tienen una expresión explícita sencilla.

Una opción algo mejor es la de $w(x) = \sqrt{1-x^2}$, en cuyo caso los polinomios extremales mónicos \hat{U}_n de grado n que resuelven

$$\|\omega_n\|_{L^2(w)} \longrightarrow \text{mín} \quad \text{con} \quad w(x) = \sqrt{1-x^2}$$

son los *polinomios de Chebyshev de segunda especie*. Estos cumplen las condiciones de ortogonalidad

$$\langle U_m, U_n \rangle_w = \int_{-1}^1 U_m(x) U_n(x) \sqrt{1-x^2} dx = 0, \quad m \neq n,$$

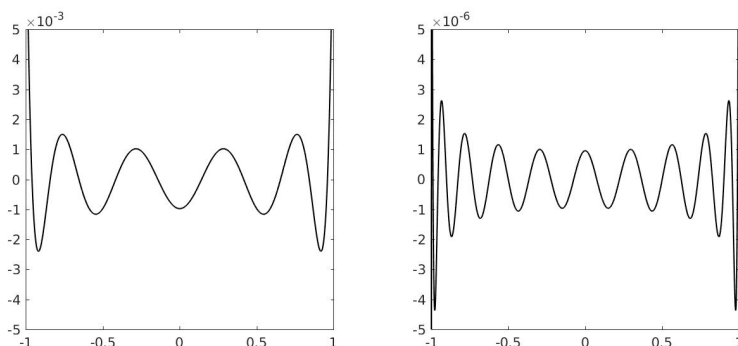


Figura 6: Polinomios de Chebyshev de segunda especie normalizados \widehat{U}_{10} (izquierda) y \widehat{U}_{20} en el intervalo $[-1, 1]$. Ambos tienen, entre los polinomios mónicos del grado correspondiente, la menor norma $\|\cdot\|_1$ en dicho intervalo. Al igual que en el caso de los polinomios de Chebyshev de primera especie, observamos que las raíces tienden a acumularse cerca de los extremos del intervalo.

y están dados por la expresión explícita

$$\widehat{U}_n(x) = 2^{-n} U_n(x), \quad U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sin(\arccos x)}, \quad n \geq 0.$$

Podemos ver algunos miembros de esta familia de polinomios ortogonales en la figura 6.

Las raíces de $U_n(x)$, por tanto,

$$x_k = \cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right), \quad 1 \leq k \leq n,$$

también son buenos nodos de interpolación sobre $[-1, 1]$.

Curiosamente, esos mismos nodos se obtienen si intentamos optimizar su ubicación minimizando ω_n en otra norma, la llamada norma $L^1(w)$,

$$\|f\|_{L^1(w)} := \int_{-1}^1 |f(x)| w(x) dx.$$

Más precisamente, los polinomios \widehat{U}_n resuelven también

$$\|\omega_n\|_{L^1(w)} \longrightarrow \text{mín} \quad \text{con} \quad w(x) = 1.$$

Todos los pesos considerados hasta el momento son parte de una familia más amplia, pero bien conocida, de *pesos de Jacobi* sobre $[-1, 1]$,

$$w(x) := (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1. \quad (8)$$

Así, los parámetros $\alpha = \beta = \pm 1/2$ corresponden a los polinomios de Chebyshev (de segunda y primera especie, respectivamente), y $\alpha = \beta = 0$, a los de Legendre. Y cuando $\alpha = \beta$, los correspondientes polinomios llevan el nombre de Gegenbauer.

La teoría general de polinomios ortogonales afirma que, en todos los casos, los ceros de los polinomios mónicos que minimizan la norma $L^2(w)$ son simples, pertenecen al intervalo $(-1, 1)$ y constituyen unos buenos nodos de interpolación sobre ese intervalo. Más concretamente, el teorema de Erdős-Turán (véase [13]) nos dice que, si elegimos los nodos de interpolación como las raíces de la sucesión de polinomios ortogonales asociada a un peso cualquiera $w(x)$ (con algunas condiciones básicas de continuidad), entonces el error de interpolación de cualquier función continua, medido en términos de $\|\cdot\|_{L^2(w)}$, tiende a 0 cuando el grado del polinomio elegido tiende a infinito. Dicho de otra forma, asintóticamente, el error de interpolación en la norma $\|\cdot\|_{L^2(w)}$ es muy pequeño. Lo que podemos garantizar en este caso es que no se produce el equivalente (para $\|\cdot\|_{L^2(w)}$) del efecto Runge; esto es, usar las raíces de estos polinomios nos permite asegurar que la interpolación produce polinomios que cada vez se acercan más a la función objetivo.

Mencionamos también que hay otras maneras de medir cómo de grande es una función. Entre las más comunes está el uso de la norma p de una función: si f está definida en $[-1, 1]$, su norma p viene dada por

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p},$$

y es, por lo tanto, una generalización de las normas en $L^1(w)$ y $L^2(w)$.

Si queremos minimizar la norma $\|\cdot\|_{L^p(w)}$ para $p \neq 1, 2$, en el caso de pesos y entre los polinomios mónicos de grado n , se tiene una condición de ortogonalidad en un marco más general, que viene dada por el siguiente resultado (que puede encontrarse, por ejemplo, en [6]): si para cada $n \geq 0$, P_n es el polinomio mónico de grado n que minimiza la norma $\|\cdot\|_{L^p(w)}$, esto es,

$$\|P_n\|_{L^p(w)} \leq \|Q\|_{L^p(w)}$$

para todo polinomio mónico Q de grado n , entonces se tiene la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^1 R(x) \operatorname{sgn}(P_n(x)) |P_n(x)|^{p-1} w(x) dx = 0,$$

para todo polinomio $R(x)$ de grado a lo más $n-1$. El resultado, de hecho, es recíproco: si la condición de ortogonalidad mencionada se cumple, entonces la sucesión de polinomios ortogonales verifica la condición de minimalidad de la norma p . En este caso, de nuevo, los ceros de P_n son reales y simples y se encuentran en el intervalo $(-1, 1)$.

Se conocen otros resultados más precisos sobre propiedades asintóticas de distribución (separación, densidad) de una sucesión de polinomios ortogonales: remitimos al lector al clásico libro de Szegő [23] para estos y otros interesantes logros, cuya descripción nos llevaría demasiado lejos en esta exposición.

3. CUADRATURAS Y POLINOMIOS ORTOGONALES

Otro problema estándar del análisis numérico es el cálculo del valor de una integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

aproximándolo por medio de una suma finita

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i), \quad (9)$$

lo que se conoce como *fórmulas de cuadratura*. Un paradigma fácil de implementar consiste en sustituir el integrando por un polinomio p que interpola el mismo en unos nodos x_0, \dots, x_n prefijados en el intervalo (a, b) , e integrar dicho polinomio, considerando el valor obtenido como una aproximación de la integral original:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i), \quad \lambda_i = \int_a^b L_i(x) dx, \quad (10)$$

con los polinomios básicos de Lagrange L_i definidos en (2). Este procedimiento da origen a las *fórmulas de cuadratura interpolatorias*.

¿Cuán precisos son los resultados obtenidos por esa vía? Una manera de medir tal precisión es por medio del llamado *grado de exactitud* de la fórmula de cuadratura, que nos dice, suponiendo que f es un polinomio, hasta qué grado máximo la fórmula (9) es exacta.

Por la propia construcción, toda fórmula de cuadratura interpolatoria con $n + 1$ nodos de la forma dada en (10) tiene grado de exactitud al menos n . En efecto, si f es un polinomio de grado a lo máximo n , sustituirlo por el polinomio que lo interpola en $n + 1$ nodos es cambiarlo. . . ¡por sí mismo! Dicho de otra forma, es no cambiarlo.

La pregunta que nos hacemos entonces es ¿podemos ir más allá?, esto es, ¿podemos integrar de forma exacta polinomios de grado mayor que n considerando fórmulas con únicamente $n + 1$ nodos? La respuesta es que sí, si podemos disponer de los nodos x_i libremente. En efecto, si tuviéramos la libertad de escoger tanto los nodos como los pesos λ_i , para $0 \leq i \leq n$, serían $2n + 2$ parámetros libres y podríamos esperar un grado de exactitud de $2n + 1$. Pero ¿es eso realmente posible?, ¿qué elecciones de nodos y pesos lo permiten?

La respuesta pasa nuevamente por resolver un problema extremal y la clave está en el siguiente resultado general —para el cual podemos incluso considerar un problema de cuadratura algo más general que (9)—,

$$\int_a^b f(x)w(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i), \quad (11)$$

donde $w \geq 0$ es una función peso integrable sobre $[a, b]$: se sabe que (11) tiene grado de exactitud al menos $n + m$ si y solo si la fórmula de cuadratura es interpolatoria

(esto es, los pesos vienen dados por la expresión en (10)) y, adicionalmente, los nodos de interpolación x_0, \dots, x_n son precisamente los ceros de un polinomio $\omega_n(x)$ de grado $n+1$ tal que

$$\int_a^b x^k \omega_n(x) w(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

La expresión anterior nos recuerda mucho la ortogonalidad que hemos visto en la sección anterior. En particular, si tomamos ω_n (de grado $n+1$) como polinomio ortogonal con respecto al peso w (es decir, $m = n+1$), obtenemos una fórmula de cuadratura con un grado de exactitud al menos $2n+1$, lo que se conoce como *fórmula de cuadratura gaussiana* o *cuadratura de Gauss-Christoffel*. Es fácil de ver también que es el máximo grado de exactitud al que podemos aspirar: una fórmula de grado $2n+2$ es imposible. (¿Por qué?, dejamos esta pregunta para el lector avezado.)

Vamos a insistir una vez más: los nodos de cuadratura x_i que garantizan el máximo grado de exactitud de una fórmula de cuadratura interpolatoria son los ceros del polinomio ortogonal (de grado $n+1$) con respecto al peso de integración w . El caso más elemental, y también el más conocido, es el de la llamada cuadratura de Gauss-Legendre, que corresponde al peso de integración constante $w(x) \equiv 1$. En efecto, en ese caso, y para distintos valores del número de nodos de interpolación, se obtienen los nodos y pesos óptimos que permiten calcular de forma exacta integrales de polinomios en el intervalo $[-1, 1]$. Resumimos los pesos y nodos concretos hasta grado 5 en la tabla 2.

N.º de nodos	x_i	λ_i	Grado de exactitud
2	± 0.57735	1	3
3	0	0.888889	5
	± 0.774597	0.555556	
4	± 0.339981	0.652145	7
	± 0.861136	0.347855	
5	0	0.568889	9
	± 0.538469	0.478629	
	± 0.90618	0.236927	

Tabla 2: Valores de los nodos y pesos para la cuadratura de Gauss-Legendre, para los primeros valores de n .

La pregunta más general de qué sucede si queremos integrar de forma exacta polinomios multivariados de grado dado, definidos en un subconjunto de \mathbb{R}^d (por ejemplo, si queremos diseñar fórmulas de cuadratura para integrar polinomios en la esfera unidad), es mucho más compleja que en el caso unidimensional. Dado un grado fijado n y un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^d$, una colección de puntos x_0, \dots, x_r proporciona una regla de cuadratura exacta si

$$\frac{1}{\text{Vol}(X)} \int_X p = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n p(x_i)$$

para todo polinomio de grado a lo sumo n , definido en \mathbb{R}^d . El término de la izquierda es una esperanza matemática, cuya definición concreta exige hilar un poco fino en la definición del concepto de integral. A efectos de este artículo, simplemente apelamos al concepto intuitivo de media: la esperanza de p en el conjunto X sería el valor que obtendríamos al hacer la media de la función p en una colección de N puntos, elegidos al azar en X de manera equidistribuida, haciendo N tender a infinito. Pues bien, recientemente se ha descubierto que si X es una esfera se puede demostrar la existencia de estos conjuntos de nodos de cuadratura «óptimos», en el sentido de que con un número pequeño de nodos se pueden integrar polinomios de grado relativamente alto (véase [5]). Aún más recientemente se ha conseguido extender este resultado al caso de que X sea una variedad algebraica suave y compacta cualquiera, véase [12], quedando abierto el caso de variedades más generales, tales como curvas con autointersecciones. A día de hoy se desconoce si estas colecciones de nodos tienen relación directa con los ceros de polinomios ortogonales, como sucede en el caso unidimensional. Más aún, salvo en los conjuntos más sencillos, no existen métodos generales para generar estas colecciones de nodos que permitan calcular integrales de forma exacta eficientemente, y la búsqueda de estas colecciones representa un activo campo de investigación en la actualidad.

4. ELECTROSTÁTICA DE LOS CEROS DE POLINOMIOS

Sea $p(z) = (z - x_1) \cdots (z - x_n)$ un polinomio mónico de grado n ; la siguiente identidad trivial, aparentemente, no contiene nada interesante:

$$|p(z)| = \exp \left(- \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{|z - x_i|} \right).$$

Pero la expresión en el miembro derecho tiene una interpretación electrostática muy importante:

$$V^{\delta_a}(z) := \log \frac{1}{|z - a|}$$

es la solución fundamental (si nos olvidamos de una constante multiplicativa) del operador de Laplace en el plano punteado (esto es, en $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$). Dicho de otra forma, el laplaciano de V^{δ_a} , como función de dos variables reales x, y , es constante e igual a 0.

En términos físicos, V^{δ_a} es el *potencial (logarítmico)* de una carga unitaria positiva situada en el punto a del plano. Por tanto, si, dado el polinomio p , colocamos en cada uno de sus ceros una carga unitaria (lo que da lugar a una distribución de n cargas puntuales que denotamos $\nu(p)$), podemos escribir

$$|p(z)| = \exp \left(-V^{\nu(p)}(z) \right),$$

donde

$$V^{\nu(p)}(z) = \sum_{i=1}^n V^{\delta_{x_i}}(z).$$

Esta «inocente» reformulación del valor absoluto de un polinomio tiene importantes implicaciones; entre ellas, permite mirar con nuevos ojos los problemas extremales para los ceros que hemos discutido antes. Por ejemplo, la norma uniforme de p sobre un compacto K se calcula por medio del mínimo global de $V^{\nu(p)}$ en K , mientras que el mínimo de dicha norma se alcanza distribuyendo los ceros de forma que maximicen el mínimo global de $V^{\nu(p)}$, lo que se conoce como *configuración de equilibrio* (electrostático) para dichos puntos.

Al igual que hemos introducido pesos para definir normas más generales en $L^p(w)$, podemos considerar que las cargas x_i están afectadas no solo por la repulsión logarítmica mutua, sino por un *campo externo* (o potencial de fondo) φ , de modo que el potencial total de ese sistema de cargas sería $V^{\nu(p)} + \varphi$, y nuevamente podemos maximizar el mínimo global de ese potencial, lo que equivale a minimizar la norma ponderada

$$\|p\|_{L^\infty(w)} = \max |p(x)w(x)|, \quad w(x) = e^{-\varphi(x)}.$$

La física nos enseña que toda configuración de equilibrio está asociada con un mínimo (local, global, etc.) de la energía del sistema. La energía logarítmica de una carga unitaria positiva es infinita, pero la de la distribución $\nu(p)$ de $n \geq 2$ cargas puntuales en un campo externo φ se define como

$$\mathcal{E}_\varphi(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i \neq j} \log \frac{1}{|x_i - x_j|} + \sum_{i=1}^n \varphi(x_i);$$

cuando $\varphi \equiv 0$, escribiremos $\mathcal{E}(x_1, \dots, x_n)$ para simplificar la notación.

Por tanto, dado un compacto $K \subset \mathbb{C}$, nos interesa el problema

$$\min \{ \mathcal{E}_\varphi(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in K \}.$$

Los puntos x_1, \dots, x_n que dan una solución al mismo se conocen como *puntos de Fekete ponderados* (y si $\varphi \equiv 0$, simplemente *puntos de Fekete*) del compacto K ; véase, por ejemplo, [20]. La configuración de Fekete no siempre es única (basta pensar en el ejemplo de $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, donde todo conjunto de puntos equiespaciados es de Fekete). Sin embargo, posee varias propiedades y conexiones interesantes.

Por ejemplo, es bien conocida la relación con los determinantes de Vandermonde,

$$e^{-2\mathcal{E}(x_1, \dots, x_n)} = \prod_{i \neq j} |x_i - x_j|^2 = \left| \begin{array}{cccc} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{array} \right|^2, \quad (12)$$

que muestra que el mínimo de energía corresponde al máximo del determinante de Vandermonde o al producto de las distancias mutuas. Esto refuerza nuestra intuición de que los puntos de Fekete están, en algún sentido, bien distribuidos, puesto que no puede haber dos de ellos que estén demasiado cerca el uno del otro si queremos que ese producto sea lo mayor posible.

Los puntos de Fekete también tienen conexión con polinomios ortogonales y ecuaciones diferenciales por medio de la siguiente observación: para el polinomio $p(z) = (z - x_1) \cdots (z - x_n)$,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}(x_1, \dots, x_n) = -\frac{p''(x_k)}{2p'(x_k)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

de modo que, suponiendo el campo externo φ diferenciable,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_\varphi(x_1, \dots, x_n) = -\frac{p''(x_k)}{2p'(x_k)} + \varphi'(x_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Vamos a considerar esa relación para los puntos de Fekete ponderados sobre $K = [-1, 1]$, suponiendo que el campo externo φ es suficientemente grande en los extremos del intervalo, de modo que todos los x_k están en $(-1, 1)$. En ese caso, el mínimo global es también mínimo local y, por tanto, un punto crítico:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

es decir,

$$-\frac{p''(x_k)}{2p'(x_k)} + \varphi'(x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Esto lo podemos reformular diciendo que

$$-p''(z) + 2\varphi'(z)p'(z) \text{ es divisible por } p(z). \quad (13)$$

Este es el germen de la relación del problema de los puntos de Fekete con las ecuaciones diferenciales, que habíamos mencionado.

Por ejemplo, consideremos el campo externo φ creado por dos cargas positivas fijadas en los extremos ± 1 del intervalo:

$$\varphi(z) = A \log \frac{1}{|z - 1|} + B \log \frac{1}{|z + 1|}, \quad A, B > 0.$$

Podemos aplicar a este campo externo las consideraciones anteriores. Puesto que φ' ahora es una función racional, podemos fácilmente ver que la conclusión (13) se convierte en una ecuación diferencial en toda regla,

$$p''(z) + \left(\frac{2A}{z - 1} + \frac{2B}{z + 1} \right) p'(z) = \frac{\lambda_n}{z^2 - 1} p(z), \quad (14)$$

donde λ_n es una constante fácil de calcular, fijándonos en los coeficientes principales de cada término: $\lambda_n = n(n + 2A + 2B - 1)$. La ecuación diferencial (14) es bien conocida en el análisis clásico y su solución polinomial es... ¡un polinomio de Jacobi de grado n ! En efecto, se trata del polinomio de Jacobi de grado n , ortogonal en $[-1, 1]$ con respecto al peso (8) con los parámetros

$$\alpha = 2A - 1 > -1, \quad \beta = 2B - 1 > -1.$$

En otras palabras, los ceros del polinomio de Jacobi de grado n con los parámetros indicados son puntos de Fekete ponderados sobre $[-1, 1]$, correspondientes al campo externo creado por masas fijas en 1 y -1 , de tamaño A y B , respectivamente. Pero, tomando $A = B = 1$, llegaremos a la conclusión de que *los n puntos de Fekete de $[-1, 1]$ (¡no ponderados!) son, además de los extremos del intervalo, los $n - 2$ ceros del polinomio de Jacobi de grado $n - 2$ y parámetros $\alpha = \beta = 1$; dicho de otra forma, son los ceros de un polinomio de Gegenbauer*, lo que fue establecido por Fejér en [14] (véase también [7]). En la figura 7 vemos algunos puntos de Fekete (para valores de n entre 3 y 16).

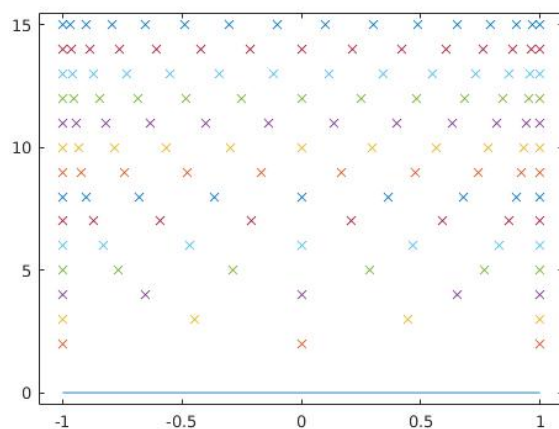


Figura 7: Puntos de Fekete en el intervalo unidad, obtenidos como ceros de los correspondientes polinomios de Gegenbauer, más los puntos en los extremos del intervalo. Cada colección (para n variable) se muestra a una altura diferente.

Resultados similares se tienen si se consideran n partículas en intervalos no acotados, con ciertas convenciones en presencia de campos externos, véase [23] y [16]. La idea clave es partir de la ecuación diferencial de segundo orden, de tipo holonómico, que satisfacen dichos polinomios ortogonales, y cuyos coeficientes son polinomios si se supone que la función peso tiene como derivada logarítmica una función racional (véase [17]).

También se conocen resultados sobre las propiedades electrostáticas de las raíces de polinomios de Jacobi cuando los parámetros α y β son variantes; véase, por ejemplo, [18].

5. OTROS MODELOS ELECTROSTÁTICOS

Mencionamos brevemente algunas generalizaciones del modelo electrostático descrito en la sección 4 que se han desarrollado en los últimos años con cierta participación de investigadores españoles.

Por un lado, la interpretación electrostática de raíces de polinomios se ha generalizado a la llamada ecuación de Lamé

$$A(x)y''(x) + 2B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0.$$

Se trata de una ecuación de segundo orden en la que $A(x)$, $B(x)$ y $C(x)$ son polinomios de grados $p+1$, p y $p-1$, respectivamente. Sus soluciones polinómicas (esto es, las funciones $y(x)$ que resuelven la ecuación y que además son polinomios) son objeto de estudio y, en particular, las raíces de esos polinomios son en cierto sentido generalización de las raíces de familias de polinomios ortogonales, puesto que hemos partido de la ecuación (13) y la hemos generalizado. Nos preguntamos ¿cuáles son las propiedades de las raíces de dichos polinomios? La misma existencia y unicidad de soluciones polinomiales de la ecuación de Lamé es una pregunta no trivial que ha sido abordada en [11]. Sucintamente, lo que se sabe actualmente es: suponiendo que $A(x)$ solo tiene ceros reales (denotémoslos a_j) y que en la descomposición en fracciones simples

$$\frac{B(x)}{A(x)} = \sum_{j=0}^p \frac{r_j}{x - a_j}$$

los coeficientes r_j no tienen el mismo signo necesariamente, entonces se deduce una interpretación electrostática de los ceros de la solución polinómica de dicha ecuación $y(x)$ como puntos de equilibrio en un campo electrostático generado por las cargas r_j en las posiciones a_j .

Otra cuestión que es objeto de investigaciones en la actualidad es la manera de generalizar los modelos electrostáticos al caso complejo. Esta cuestión implica el estudio de los llamados polinomios paraortogonales, cuya descripción nos llevaría demasiado lejos en nuestra exposición. Un interesante caso particular, el de los ceros de polinomios paraortogonales asociados a medidas soportadas en la circunferencia unidad, ha sido abordado en [21]. En dicho trabajo se muestra que para una función peso diferenciable y absolutamente continua, cuyo soporte es un subconjunto infinito de puntos de la circunferencia unidad, sus correspondientes polinomios paraortogonales satisfacen una ecuación diferencial lineal de segundo orden, de modo que los ceros de dichos polinomios corresponden a localizaciones de un conjunto de partículas en un equilibrio electrostático respecto a un determinado campo externo. Propiedades de los ceros de polinomios paraortogonales respecto a medidas de probabilidad con componente singular soportada en el círculo unidad han sido estudiadas en [9].

6. PROCESOS PUNTUALES, ELECTROSTÁTICA Y DISTRIBUCIÓN DE PUNTOS EN ESFERAS Y OTROS CONJUNTOS

En la sección 4 hemos visto cómo el problema de encontrar puntos de Fekete ponderados en un intervalo (esto es, el problema de distribuir un número de cargas en un intervalo de forma que se minimice su potencial) quedaba completamente resuelto a partir del estudio de los ceros de polinomios de Jacobi. Sin embargo,

el caso de la distribución de puntos en conjuntos más generales que los intervalos (por ejemplo, podemos pensar en distribuir puntos en una esfera) es mucho más complicado de comprender. Todavía podemos definir la energía logarítmica de n puntos cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in E$ de un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ como

$$\mathcal{E}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j} \log \frac{1}{\|x_i - x_j\|}.$$

Una colección de puntos $x_1, \dots, x_n \in E$ que minimizan \mathcal{E} o, lo que es lo mismo, que maximizan el producto

$$\prod_{i \neq j} \|x_i - x_j\|,$$

recibe, como antes, el nombre de *puntos de Fekete* del conjunto E , véase, por ejemplo, [20].

Al igual que en el caso de un conjunto del plano o un intervalo, los puntos de Fekete, en este caso general, también están, en algún sentido, bien distribuidos, puesto que no puede haber dos de ellos que estén demasiado cerca el uno del otro si queremos que el producto de las distancias mutuas sea lo mayor posible.

Pues bien, algunas de las preguntas más elementales referentes a las colecciones de puntos de Fekete en conjuntos tales como esferas aún no tienen respuesta. Señalamos, por ejemplo, que el problema número 7 de la lista de Smale para el siglo XXI [22] pide, simplemente, encontrar algorítmicamente, de forma aproximada, una colección de puntos de Fekete en la esfera unidad \mathbb{S} en \mathbb{R}^3 o, más generalmente, en \mathbb{R}^n . Véase [8] para un completísimo resumen de la extensa bibliografía y resultados conocidos en este tema.

Denotamos por m_n el valor del mínimo de la energía logarítmica; esto es, m_n es la energía de una colección de puntos de Fekete. Proporcionar un valor asintótico para m_n , lo más preciso posible, es un problema abierto de importancia fundamental.

Por ejemplo, en el caso de la esfera unidad en \mathbb{R}^3 , se sabe que

$$m_n = \left(\frac{1}{2} - \log 2 \right) n^2 - \frac{1}{2} n \log(n) + Cn + o(n),$$

pero el valor de C no se conoce. En [4] se demuestra que

$$C \leq 2 \log(2) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{2}{3} \right) + 3 \log \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right) = -0.556053049 \dots$$

y se conjetura que esta desigualdad es, de hecho, una igualdad.

Una herramienta para aproximar el valor de m_n es el *diámetro transfinito* del conjunto compacto E , que se define por $d(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(E)$, donde

$$d_n(E) = \max_{x_1, \dots, x_n \in E} \left(\prod_{i \neq j} \|x_i - x_j\| \right)^{\frac{1}{n(n-1)}} = e^{-\frac{m_n}{n(n-1)}}.$$

Dicho de otra forma, el diámetro transfinito nos da el primer término asintótico de la energía de los puntos de Fekete:

$$m_n = -\log(d(E))n^2 + o(n^2).$$

Un importante y bien conocido resultado en teoría del potencial (véase [24, p. 93]) es la relación que existe entre el mínimo valor posible de la energía logarítmica y su correspondiente concepto continuo que definiremos a continuación. Consideremos la *constante de Robin*

$$V(E) = \inf_{\nu} \int_{(x,y) \in E \times E} \log \frac{1}{\|x - y\|} d(\nu \times \nu),$$

donde el ínfimo se toma en el conjunto de medidas de probabilidad en E . La cantidad asociada

$$\gamma(E) = e^{-V(E)}$$

se llama *capacidad logarítmica* de E . Nótese que $V(E)$ y $\gamma(E)$ son una versión continua del problema de la búsqueda de puntos de Fekete: en lugar de buscar una colección finita de puntos se busca una medida minimizante, con la puntualización de que la diagonal en $E \times E$ no está excluida de la integral, de modo que, por ejemplo, si una medida tiene un punto aislado (un átomo) entonces su energía continua es infinita.

Se puede demostrar que la medida minimizante en casos de espacios simétricos como, por ejemplo, la esfera unidad en \mathbb{R}^d , es precisamente la medida uniforme, con lo que resulta fácil calcular $V(E)$ y $\gamma(E)$ en dichos casos.

Pues bien, la teoría del potencial de Fekete-Tsuji [24] demuestra que, para todo conjunto compacto E , la capacidad logarítmica es igual al diámetro transfinito. Dicho de otra forma,

$$m_n = V(E)n^2 + o(n^2).$$

Así pues, la pregunta sobre el valor de m_n tiene al menos una respuesta parcial: el primer término del valor asintótico es exactamente la capacidad logarítmica del conjunto. De ahí que se haya dedicado un esfuerzo importante a buscar el siguiente término en la asintótica para diversas colecciones de conjuntos; véase, por ejemplo, [4], para las cotas óptimas conocidas en el caso de la esfera de dimensión 2; y [3, 2], para dimensiones superiores. Es precisamente en estos trabajos donde observamos otra curiosa relación de este problema con los polinomios ortogonales. Para explicar esta relación procedemos de la siguiente manera: primero consideramos una colección de n funciones cualesquiera, f_1, \dots, f_n , todas ellas definidas en E y con valores reales, y con la propiedad de que $\|f_i\|^2 < \infty$, para $1 \leq i \leq n$. Basta, por ejemplo, si E es compacto, que todas las funciones sean continuas. Pues bien, tomamos, a continuación, el conjunto H de todas las funciones que se pueden obtener como combinación lineal de f_1, \dots, f_n ; dicho de otra forma, una función f será un elemento de H si podemos encontrar $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n.$$

Podemos ver que H es un espacio vectorial (la suma de dos funciones en H se queda en H , lo mismo que el producto por un escalar) y si, además, pedimos que ninguna de las funciones originales f_i se pueda obtener como combinación lineal de las otras, entonces H tendrá dimension n . Consideramos una base ortonormal $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de H . Por «ortonormal», debemos entender que, en el mismo espíritu que (7), se cumple

$$\int_{x \in E} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

La teoría de los llamados *procesos determinantes* (véase [15]) garantiza que existe una cierta forma de elegir al azar unos puntos x_1, \dots, x_n en E con la propiedad de que el valor esperado de su energía logarítmica es igual a

$$\int_{x, y \in E} \log \frac{1}{\|x - y\|} (K(x, x)K(y, y) - K(x, y)^2) d(x, y), \quad (15)$$

donde

$$K(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_1(y) + \dots + \varphi_n(x)\varphi_n(y)$$

es el llamado «núcleo reproductor» de H , que cumple, para $f \in H$,

$$f(x) = \int_{y \in E} f(y) K(x, y) dy.$$

Así, se establece lo que podríamos llamar *el Juego de la Energía*. Para jugar en un conjunto E , dos jugadores eligen sendas colecciones de funciones f_1, \dots, f_n y g_1, \dots, g_n ; a continuación, cada uno de ellos calcula el núcleo reproductor correspondiente a su colección de funciones y entonces calcula el valor de (15). El ganador es el que obtiene el menor valor posible.

A día de hoy, las cotas más precisas existentes sobre el valor de m_n (el mínimo valor posible de la energía logarítmica) en una esfera de \mathbb{R}^d se han obtenido jugando a este *Juego de la Energía*. Más concretamente, en [3] se demuestra que, tomando en la esfera de \mathbb{R}^d las funciones f_1, \dots, f_n dadas por los llamados *armónicos esféricos*, producen puntos tan bien distribuidos que, en media, su energía logarítmica es menor que la que todas las cotas anteriores podían concluir. Pues bien, esta aproximación al problema es posible gracias a la relación de los armónicos esféricos con los polinomios ortogonales, pues el núcleo reproductor K para estas colecciones de funciones es, precisamente,

$$K(x, y) = CP_L^{(\alpha, \beta)}(\langle x, y \rangle),$$

donde L, α, β, C son ciertas constantes relacionadas con la dimensión del problema y $P_L^{(\alpha, \beta)}$ es... ¡precisamente el polinomio de Jacobi de grado L con el peso dado en (8)! Al final, pues, jugar al *Juego de la Energía* acaba consistiendo en calcular integrales que involucran polinomios de Jacobi. Y lo mismo sucede si uno intenta distribuir puntos en otros conjuntos, tales como el grupo ortogonal especial (el conjunto de matrices ortogonales 3×3 de determinante unidad), el toro plano ([19]) y otros conjuntos (en el caso de variedades riemannianas abstractas, en lugar de la

energía logarítmica se puede utilizar el potencial de Green como se sugiere en [1]). Refinamientos sucesivos de este método inicial se pueden desarrollar para algunos conjuntos; véase, por ejemplo, [2] para un «truco» ideado para las esferas de dimensión impar.

7. CONCLUSIÓN

En este escrito hemos recopilado algunas de las propiedades de las raíces de diversas colecciones de polinomios ortogonales. Estas propiedades son extremales en el sentido de que son óptimas para resolver algunos tipos de problemas, como la interpolación, la integración aproximada o la minimización de distintas energías. Hemos visto, también, cómo en problemas de dimensión superior a 1 estos procedimientos elementales son mucho más complicados que en el caso unidimensional, pero que, aun así, en ocasiones, los polinomios ortogonales proporcionan alguna información parcial sobre cómo obtener, o qué propiedades deberían tener, los puntos buscados. Finalmente, hemos señalado cómo algunas generalizaciones de estos problemas son motivo de investigación de grupos actuales, en particular en el campo de la electros-tática.

Estas reflexiones proporcionan una motivación para el estudio de las familias de polinomios ortogonales y nos animan a buscar en dichas colecciones la solución de otros problemas. Así, tratamos de sugerir al lector que tenga en mente algún problema relacionado con la distribución de un número finito de puntos, a hacerse la siguiente pregunta: *¿no vendrá la solución a mi problema simplemente dada por las raíces de alguna sucesión de polinomios ortogonales?*

AGRADECIMIENTOS. Carlos Beltrán está parcialmente financiado por los proyectos 21.B396.64314 (Banco Santander y Universidad de Cantabria) y MTM2017-83816-P (MINECO). Francisco Marcellán está parcialmente financiado por el proyecto MTM2015-65888-C4-2-P (MINECO). Andrei Martínez-Finkelshtein está parcialmente financiado por los proyectos MTM2014-53963-P (MINECO), la Junta de Andalucía (Proyecto de Excelencia P11-FQM-7276 y grupo de investigación FQM-229) y el Campus de Excelencia Internacional del Mar (CEIMAR) de la Universidad de Almería.

REFERENCIAS

- [1] C. BELTRÁN, N. CORRAL Y J. G. CRIADO DEL REY, Discrete and continuous Green energy on compact manifolds, prepublicación, 2017, <https://arxiv.org/abs/1702.00864>.
- [2] C. BELTRÁN Y U. ETAYO, The projective ensemble and distribution of points in odd-dimensional spheres, *Constr. Approx.* (2018), <https://doi.org/10.1007/s00365-018-9426-6>.

- [3] C. BELTRÁN, J. MARZO Y J. ORTEGA-CERDÀ, Energy and discrepancy of rotationally invariant determinantal point processes in high dimensional spheres, *J. Complexity* **37** (2016), 76–109.
- [4] L. BÉTERMIN Y E. SANDIER, Renormalized energy and asymptotic expansion of optimal logarithmic energy on the sphere, *Constr. Approx.* **47** (2018), 39–74.
- [5] A. BONDARENKO, D. RADCHENKO Y M. VIAZOVSKA, Optimal asymptotic bounds for spherical designs, *Ann. of Math. (2)* **178** (2013), 443–452.
- [6] P. BORWEIN Y T. ERDÉLYI, *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Springer Verlag, New York, 1995.
- [7] L. BOS, M. A. TAYLOR Y B. A. WINGATE, Tensor product Gauss-Lobatto points are Fekete points for the cube, *Math. Comp.* **70** (2001), 1543–1547.
- [8] J. BRAUCHART Y P. J. GRABNER, Distributing many points on spheres: minimal energy and designs, *J. Complexity* **31** (2015), 293–326.
- [9] K. CASTILLO, F. MARCELLÁN Y M. N. REBOCHO, Zeros of para-orthogonal polynomials and linear spectral transformations on the unit circle, *Numer. Algorithms* **71** (2016), 699–714.
- [10] P. DAVIS, *Interpolation and Approximation*, Dover, New York, 1975.
- [11] D. K. DIMITROV Y W. VAN ASSCHE, Lamé differential equations and electrostatics, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), 3621–3628.
- [12] U. ETAYO, J. MARZO Y J. ORTEGA-CERDÀ, Asymptotically optimal designs on compact algebraic manifolds, *Monatsh. Math.* (2018), <https://doi.org/10.1007/s00605-018-1174-y>.
- [13] P. ERDŐS Y P. TURÁN, On interpolation. I. Quadrature- and mean-convergence in the Lagrange interpolation, *Ann. of Math. (2)* **38** (1937), 142–155.
- [14] L. FEJÉR, Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle ein Möglichst kleines Maximum Besitzt, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (2)* **1** (1932), 263–276.
- [15] J. B. HOUGH, M. KRISHNAPUR, Y. PERES Y B. VIRÁG, *Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes*, University Lecture Series, 51, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [16] M. E. H. ISMAIL, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 96, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2005.
- [17] F. MARCELLÁN, A. MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN Y P. MARTÍNEZ-GONZÁLEZ, Electrostatic models for zeros of polynomials: old, new, and some open problems, *J. Comput. Appl. Math.* **207** (2007), 258–272.
- [18] A. MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN, P. MARTÍNEZ-GONZÁLEZ Y R. ORIVE, Zeros of Jacobi polynomials with varying non-classical parameters, *Special functions (Hong Kong, 1999)*, 98–113, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.
- [19] J. MARZO Y J. ORTEGA-CERDÀ, Expected Riesz energy of some determinantal processes on flat tori, *Constr. Approx.* **47** (2018), 75–88.

- [20] E. SAFF Y V. TOTIK, *Logarithmic potentials with external fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 316, Springer-Verlag, Berlín, 1997.
- [21] B. SIMANEK, An electrostatic interpretation of the zeros of paraorthogonal polynomials on the unit circle, *SIAM J. Math. Anal.* **48** (2016), 2250–2268.
- [22] S. SMALE, Mathematical problems for the next century, *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, 271–294, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [23] G. SZEGŐ, *Orthogonal polynomials*, cuarta edición, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
- [24] M. TSUJI, *Potential theory in modern function theory*, Maruzen Co., Tokyo, 1959.

CARLOS BELTRÁN, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, ESTADÍSTICA Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Correo electrónico: beltranc@unican.es

Página web: <http://personales.unican.es/beltranc/index.html>

FRANCISCO MARCELLÁN, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID, E INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (ICMAT) CSIC-UAM-UCM-UC3M

Correo electrónico: pacomarc@ing.uc3m.es

Página web: <http://gama.uc3m.es/index.php/fmarcellan.html>

ANDREI MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE ALMERÍA, Y DEPARTMENT OF MATHEMATICS, BAYLOR UNIVERSITY

Correo electrónico: andrei@ual.es

Página web: <https://w3.ual.es/~andrei/>